האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה בתורת הקבוצות (80200)
מועד ב' תשס"ד

שם המורה: פרופ' ב. ווייס **משך הבחינה: שעתיים**

מס' סטודנט: _____ **מס' מחברת: ____**

חלק א: ענה של שתי השאלות הבאות. יש לסמן בטופס הבחינה את התשובה הנכונה.

(כל שאלה 20 נק')

1. במבחן תלמיד כתב הוכחה של משפט קנטור על הקשר בין העוצמות של X ו- $P(X)$.
תוך כדי ההוכחה נמצאו הפסקאות הבאות. ציין אלו מהן נכונות ואלו מהן אינן נכונות.

א. משפט קנטור תקף רק עבור קבוצות אינסופיות.

☐ נכון; ☐ לא נכון

ב. יש התאמה חח"ע ועל בין $P(X)$ לבין הפונקציות מ- X ל- $\{0,1\}$.

☐ נכון; ☐ לא נכון

ג. קיימת העתקה חח"ע מ- X ל- $P(X)$. ☐ נכון; ☐ לא נכון

ד. אם h העתקה מ- X ל- $P(X)$ ונגדיר $A=\{x\in X : x\notin h(x)\}$ אזי
$A\in h(X)$. ☐ נכון; ☐ לא נכון

ה. לכל X אין העתקה מ- $P(X)$ על X. ☐ נכון; ☐ לא נכון

2. בהוכחת השקילות בין אקסיומת הבחירה ואכסיומת הסדר הטוב הופיעו מספר טענות ביניים. ציין אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.

א. אם $(A,\le)$ סדורה היטב ו- $B\subset A$ (הכלה ממש) אזי יש $a\in A$ כך ש-
$(B,\le)$ שקולה לרישא של a. ☐ נכון; ☐ לא נכון

ב. בקבוצה סדורה היטב $(A,\le)$ יש פונקצית בחירה יחידה על
$P(A)\setminus\{0\}$. ☐ נכון; ☐ לא נכון

ג. בכל קבוצה סדורה היטב לכל שרשרת יש חסם עליון.

☐ נכון; ☐ לא נכון

ד. אם f העתקה מ- $P(X)$ ל- X כך שלכל $0\neq A\in P(X)$, $f(A)\in A$
אזי יש סדר טוב על X כך שתמיד $f(A)$ הוא האיבר המינימלי של A.

☐ נכון; ☐ לא נכון

ה. כדי להוכיח שאקסיומת הבחירה נכונה עבור קבוצה X מספיק לדעת
שניתן להגדיר סדר טוב על $P(X)$.

☐ נכון; ☐ לא נכון

חלק ב: ענה של 5 שאלות מתוך 6. יש לסמן בטופס הבחינה את התשובה הנכונה

(כל שאלה 4 נק')

1. לכל X,Y,Z קבוצות, אזי $X\times Y\times Z\subseteq P(P(X\cup Y\cup Z))$.

☐ נכון; ☐ לא נכון

2. יהי V מרחב וקטורי מעל Q הרציונלים עם בסיס $\{e_n\}_{n<\omega}$ אזי V בת-מניה.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

3. עוצמת קבוצת הפונקציות הגזירות אין-סוף פעמים מ- R לעצמו היא $\aleph$ (עוצמת הרצף).

☐ נכון; ☐ לא נכון.

4. לכל קבוצה סדורה חלקית $(X,\leq)$ אם לכל x הרישא $s(x)$ סדורה היטב אז X סדורה היטב.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

5. יהי ω_1 הסודר הראשון שאיננו בן-מניה. קימת סידרה $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ ו- $\alpha_n<\omega_1$ לכל n כך ש- $\lim_{n<\omega}\alpha_n=\omega_1$.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

6. יהיו α,β,γ סודרים כך ש- $\beta<\gamma$ אזי $\alpha^\beta<\alpha^\gamma$.

☐ נכון; ☐ לא נכון.

חלק ג: ענה של 5 שאלות מתוך 6. סמן בטופס הבחינה את התשובה הנכונה. (כ"א 8 נק')

1. יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סידרה של קבוצות, מהי הטענה הנכונה בהכרח:

i. ☐ $\underline{\lim}A_n\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$.

ii. ☐ $\underline{\lim}A_n\subseteq\overline{\lim}A_n$.

iii. ☐ $\underline{\lim}A_n\supseteq\overline{\lim}A_n$.

iv. ☐ $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\overline{\lim}A_n$.

2. יהיו $f:X\to Y$ ו- $g:Y\to Z$ פונקציות. קבע מהי הטענה שאינה בהכרח נכונה:

i. ☐ אם f ו- g חח"ע אזי גם gf חח"ע.

ii. ☐ אם f חח"ע ו- g על אזי gf חח"ע.

iii. ☐ אם gf חח"ע אזי f היא חח"ע.

iv. ☐ אם gf היא על ו- g חח"ע אזי f היא על.

3. יהיו $a > b$ מונים שלפחות אחד מהם אינסופי מה בהכרח נכון:

☐ i. $a + b > a$.

☐ ii. $a \times b \leq a$.

☐ iii. $a \times b > a$.

☐ iv. $a^b > a$.

4. יהי a מונה אינסופי ותהי A קבוצה כך ש- $|A| = a$. מה מבין הבאים אינו נכון:

☐ i. קבוצת הסדרות הסופיות של איברים מ- A היא מעוצמה a.

☐ ii. אם Y היא קבוצת כל סדרות הבנות מניה של A אז $|Y| > a$.

☐ iii. קבוצת כל תתי הקבוצות האינסופיות בעוצמה a היא 2^a.

☐ iv. קבוצת כל תתי הקבוצות שהמשלים שלהן הוא מעוצמה a היא 2^a.

5. מה מבין הבאים אינו שקול לאחרים:

☐ i. תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית לא ריקה, כך שלכל שרשרת $Y \subseteq X$ יש חסם מלעיל ב- X, אזי יש ב- X איבר מקסימלי.

☐ ii. לכל קבוצה סדורה היטב יש סודר השקול לה.

☐ iii. לכל משפחה $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ לא ריקה של קבוצות לא ריקות הקבוצה $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ אינה ריקה.

☐ iv. לכל פונקציה $f : X \to Y$ שהיא על קימת פונקציה g כך ש- $f \cdot g$ היא הזהות על Y.

6. יהיו X, Y קבוצות ויהיו $\{A_i\}$ משפחה של תתי קבוצות של X ו- $\{B_j\}$ משפחה של תתי קבוצות של Y, ותהי $g : X \to Y$ פונקציה בין X ל- Y. מה אינו בהכרח נכון:

☐ i. $g(g^{-1}(\bigcup_j B_j) = g(\bigcup_j g^{-1}(B_j))$.

☐ ii. $g^{-1}(g(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i g^{-1}(g(A_i))$.

☐ iii. $g(g^{-1}(\bigcap_j B_j) = g(\bigcap_j g^{-1}(B_j))$.

☐ iv. $g^{-1}(g(\bigcap_i A_i)) = \bigcap_i g^{-1}(g(A_i))$.

בהצלחה!